(Previously on Loukas) 03-03-16

Θεώρημα 1: $x_1, \dots, x_n$ τυχαίο δείγμα από πληθυσμό (μ, σ^2)

i) $E(\bar{x}) = \mu$, ii) $Var(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$, iii) $E(S^2) = \sigma^2$

Πόρισμα 1: X_{11}, X_{1n} τυχαίο δείγμα από πληθυσμό (μ_1, σ_1^2)
$X_{21}, \dots, X_{2n}$: -ll- (μ_2, σ_2^2)

i) $E(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \mu_1 - \mu_2$, ii) $Var(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$

Κατανομές: $X_v^2 = \sum_{i=1}^{v} N^2(0,1) \equiv G(a = \frac{v}{2}, b = 2)$

$t_v = \frac{N(0,1)}{\sqrt{X_v^2 / v}}$ $\quad F_{v_1, v_2} = \frac{X_{v_1}^2 / v_1}{X_{v_2}^2 / v_2}$

Θεώρημα 2: $X_1, \dots, X_n$ τυχαίο δείγμα από $N(\mu, \sigma^2)$

i) $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$, ii) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ X_{n-1}^2 , iii) $S^2, \bar{X}$ = ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές

Πόρισμα 2: Έστω $(\bar{X}_1, S_1^2)$ και $(\bar{X}_2, S_2^2)$ οι δειγματικοί μέσοι και διακυμάνσεις δύο τυχαίων δειγμάτων από δύο ανεξάρτητους κανονικούς πληθυσμούς. $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma^2)$ αντίστοιχα

Τότε: $\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$, όπου S_p^2 ⊛

⊛ $S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$

Θεώρημα 3: Έστω $X_1, \dots, X_n$ τυχαίο δείγμα από $N(\mu, \sigma^2)$

Τότε: $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

Θεώρημα 4: Έστω S_1^2 και S_2^2 δειγματικές διακυμάνσεις από δύο δείγματα ανεξάρτητων κανονικών πληθυσμών $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$

Τότε: $\dfrac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$

Απόδειξη από Θεώρημα 3:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n) \rightarrow \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \\ \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n-1} \end{array}\right\} \dfrac{\frac{X-\mu}{\sigma\sqrt{n}}}{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2/n-1}} \sim t_{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Απόδειξη από Θεώρημα 4:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim X^2_{n-1} \\ \\ \dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim X^2_{n_2-1} \end{array}\right\} \dfrac{\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \Big/ (n_1-1)}{\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \Big/ (n_2-1)} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$$

Απόδειξη από Πόρισμα 2

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}_1 &\sim N(\mu_1, \sigma^2/n_1)\\ \bar{x}_2 &\sim N(\mu_2, \sigma^2/n_2)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{x}_1-\bar{x}_2 \sim N(\mu_1-\mu_2, \underbrace{\sigma^2/n_1+\sigma^2/n_2}_{\sigma^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)})$$

$$\leadsto \frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim N(0,1) \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2} &\sim X^2_{n_1-1}\\ \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2} &\sim X^2_{n_2-1}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}+\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\left(=\frac{(n_1+n_2-2)S_p^2}{\sigma^2}\right) \sim X^2_{n-1,n-2} \quad (2)$$

$$\text{Από } (1),(2) \Rightarrow \frac{\dfrac{\bar{x}_1-\bar{x}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{1/n_1+1/n_2}}}{\sqrt{\dfrac{(n_1+n_2-2)S_p^2}{\sigma^2}\Big/(n_1+n_2-2)}} \sim t_{n_1,n_2,-2}$$

- Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

I) Έστω $x_1, \dots, x_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, η καθεμία με πεπερασμένη μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2.

Τότε η τυχαία μεταβλητή $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \overset{*}{\sim} N(0,1)$ ή

Ισοδύναμα, $\sum_{i=1}^{n} x_i \overset{*}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2)$ {για μεγάλα n}

(*) κατά προσέγγιση

(ΙΙ) Έστω τυχαίο δείγμα $x_1, \dots, x_n$ από πληθυσμό (μ, σ^2)

Τότε, για μεγάλα n, $\bar{x} \overset{(*)}{\sim} N(\mu, \sigma^2/n)$ ή

ισοδύναμα, $\dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{(*)}{\sim} N(0,1)$

<u>Παράδειγμα 3.1</u>: Τυχαίο δείγμα μεγέθους $n=25$ από $N(\mu, \sigma^2=625)$

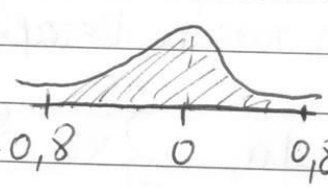
i) Να βρεθεί η πιθανότητα το $\bar{x}$ να διαφέρει από το μ κατά 4 ή περισσότερο.

ii) $P(S^2 > 323) = ?$

<u>Λύση</u>: i) $P(|\bar{x}-\mu| \geq 4) = 1 - P(|\bar{x}-\mu| \leq 4) = 1 - P(-4 \leq \bar{x}-\mu \leq 4) =$

$$= 1 - P\left(-\frac{4}{\sqrt{\frac{625}{25}}} \leq \underbrace{\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}_{\substack{\| \\ Z \sim N(0,1)}} \leq \frac{4}{\sqrt{\frac{625}{25}}}\right) = 1 - P\left(-\frac{4}{5} \leq Z \leq \frac{4}{5}\right) =$$

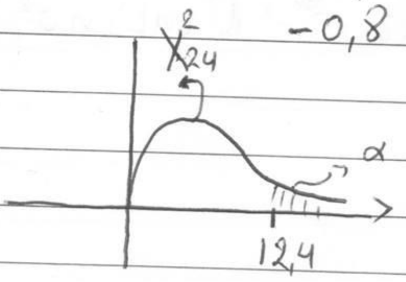
$$= 1 - P(0{,}8 \leq Z \leq 0{,}8) = 1 - 2P(0 \leq Z \leq 0{,}8) = 1 - 2 \cdot 0{,}2881 = 0{,}4238$$



ii) $P(S^2 \geq 323) = P\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \geq \dfrac{24 \cdot 323}{625}\right) =$

$= P(X^2_{24} \geq 12{,}4) = 0{,}975$

$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n-1} \Rightarrow \dfrac{24S^2}{625} \sim X^2_{24}$



(*) κατά προσέγγιση